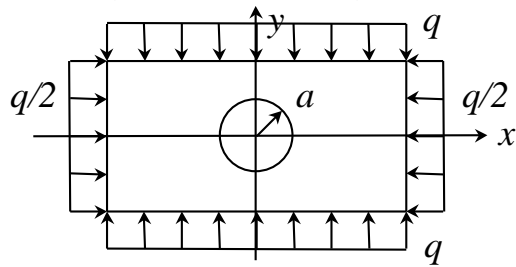


Мой вариант -

$$\textcircled{13} \quad \varphi = A_1 r^2 + B_1 \ln r + (A_2 r^2 + C_2 / r^2 + D_2) \cos 2\theta$$



ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАЧИ 4 В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

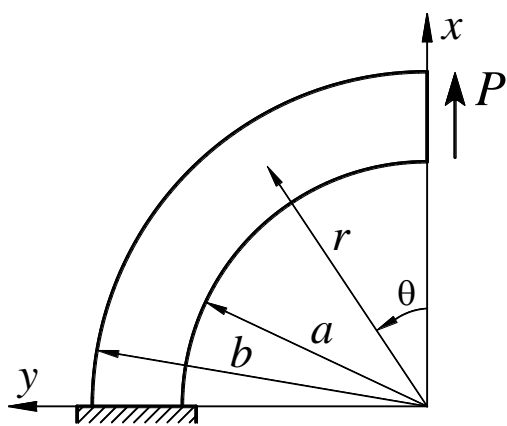


Рис. 4.5

Для кривого бруса на торце которого действует сосредоточенная сила (рис. 4.5) функция напряжений задана в виде

$$\varphi = \left(Ar^3 + \frac{B}{r} + Cr \ln r \right) \sin \theta.$$

1. Проверим, является ли данная функция напряжений решением плоской задачи теории упругости. Бигармоническое уравнение для функции напряжений в полярных координатах имеет вид

$$\nabla^2(\nabla^2\varphi) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) (\nabla^2\varphi) = 0.$$

Вычисляем производные от функции напряжений

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \left(3Ar^2 - \frac{B}{r^2} + C \ln r + C \right) \sin \theta,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = \left(6Ar + \frac{2B}{r^3} + \frac{C}{r} \right) \sin \theta,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \left(Ar^3 + \frac{B}{r} + Cr \ln r \right) \cos \theta,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = - \left(Ar^3 + \frac{B}{r} + Cr \ln r \right) \sin \theta,$$

$$\nabla^2 \varphi = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = \sin \theta \left[6Ar + \frac{2B}{r^3} + \frac{C}{r} + 3Ar - \frac{B}{r^3} + \frac{C \ln r}{r} + \frac{C}{r} - \right. \\ \left. - Ar - \frac{B}{r^3} - \frac{C \ln r}{r} \right] = \left[8Ar + \frac{2C}{r} \right] \sin \theta.$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 \varphi) = \left(8A - \frac{2C}{r^2} \right) \sin \theta,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (\nabla^2 \varphi) = \frac{4C}{r^3} \sin \theta,$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla^2 \varphi) = \left(8Ar + \frac{2C}{r} \right) \cos \theta,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (\nabla^2 \varphi) = - \left(8Ar + \frac{2C}{r} \right) \sin \theta,$$

$$\nabla^2 (\nabla^2 \varphi) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) (\nabla^2 \varphi) = \left[\frac{4C}{r^3} + \frac{8A}{r} - \frac{2C}{r^3} - \frac{8A}{r} - \frac{2C}{r^3} \right] \sin \theta \equiv 0,$$

т.к. бигармоническое уравнение тождественно удовлетворяется, то принятая функция напряжений является решением плоской задачи.

2. Записываются выражения для напряжений. Полагаем, что проекции объемных сил в направлении осей r и θ равны нулю, т.е. $R_r = 0$, $R_\theta = 0$.

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - rR_r = \left[3Ar - \frac{B}{r^3} + \frac{C \ln r}{r} + \frac{C}{r} - Ar - \frac{B}{r^3} - \frac{C \ln r}{r} \right] \sin \theta = \\ = \left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{C}{r} \right) \sin \theta,$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - rR_\theta = \left(6Ar + \frac{2B}{r^3} + \frac{C}{r} \right) \sin \theta,$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = - \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(Ar^2 + \frac{B}{r^2} + C \ln r \right) \cos \theta \right] = - \left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{C}{r} \right) \cos \theta.$$

3. Определение постоянных интегрирования из граничных условий (рис. 4.6). Статические граничные условия в полярных координатах имеют вид

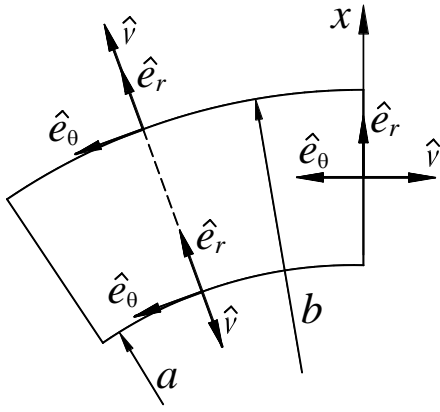


Рис. 4.6

$$q_r = \sigma_r l + \tau_{r\theta} m,$$

$$q_\theta = \tau_{\theta r} l + \sigma_\theta m,$$

где $l = \cos(\hat{v}, \hat{e}_r)$, $m = \cos(\hat{v}, \hat{e}_\theta)$ - направляющие косинусы нормали \hat{v} к поверхности; q_r, q_θ - проекции поверхностных сил в направлении координатных осей r и θ соответственно.

а) Поверхность $r = a$ (рис. 4.6). Для этой грани $q_r = 0, q_\theta = 0$, т.к. поверхность свободна от внешних нагрузок, направляющие косинусы

$$\begin{cases} l = \cos(\hat{v}, \hat{e}_r) = \cos 180^\circ = -1, \\ m = \cos(\hat{v}, \hat{e}_\theta) = \cos 90^\circ = 0. \end{cases}$$

Первое граничное условие с учетом уравнения грани $r = a$ принимает вид

$$0 = \sigma_r|_{r=a} \cdot (-1) + \tau_{r\theta}|_{r=a} \cdot 0, \quad \text{откуда } \sigma_r|_{r=a} = 0,$$

откуда с учетом формул для напряжений

$$\sigma_r|_{r=a} = \left(2Aa - \frac{2B}{a^3} + \frac{C}{a} \right) \sin \theta = 0.$$

Так как условие должно выполняться при любом угле θ , то

$$2Aa - \frac{2B}{a^3} + \frac{C}{a} = 0. \quad (1)$$

Второе граничное условие дает

$$q_\theta = \tau_{\theta r}|_{r=a} \cdot (-1) + \sigma_\theta|_{r=a} \cdot 0 = 0, \quad \text{следовательно } \tau_{\theta r}|_{r=a} = 0,$$

откуда

$$\tau_{\theta r}|_{r=a} = - \left(2Aa - \frac{2B}{a^3} + \frac{C}{a} \right) \cos \theta = 0.$$

Так как условие так же должно выполняться при любом значении θ , то

$$2Aa - \frac{2B}{a^3} + \frac{C}{a} = 0 \quad (2)$$

б) Поверхность $r = b$ (рис. 4.6). Для этой грани $q_r = 0, q_\theta = 0$, т.к. поверхность свободна от внешних нагрузок, направляющие косинусы

$$\begin{cases} l = \cos(\hat{v}, \hat{e}_r) = \cos 0^\circ = 1, \\ m = \cos(\hat{v}, \hat{e}_\theta) = \cos 90^\circ = 0. \end{cases}$$

Из первого граничного условия с учетом уравнения грани $r = b$ получаем

$$q_r = \sigma_r|_{r=b} \cdot 1 + \tau_{r\theta}|_{r=b} \cdot 0 = 0, \quad \text{или } \sigma_r = \sigma_r|_{r=b} = 0,$$

откуда с учетом выражения для напряжения

$$\sigma_r|_{r=b} = \left(2Ab - \frac{2B}{b^3} + \frac{C}{b} \right) \sin \theta = 0.$$

Так как условие должно выполняться при любом угле θ , то

$$2Ab - \frac{2B}{b^3} + \frac{C}{b} = 0 \quad (3)$$

Из второго граничного условия

$$q_\theta = \tau_{\theta r}|_{r=b}(1) + \sigma_\theta|_{r=b}(0) = 0, \text{ или } \tau_{\theta r}|_{r=b} = 0,$$

откуда

$$\tau_{\theta r}|_{r=b} = - \left(2Ab - \frac{2B}{b^3} + \frac{C}{b} \right) \cos \theta = 0.$$

Так как условие так же должно выполняться при любом значении θ , то

$$2Ab - \frac{2B}{b^3} + \frac{C}{b} = 0. \quad (4)$$

Как видно из решения, уравнения (1) и (2), а так же (3) и (4) попарно тождественны. Таким образом, имеем два независимых уравнения, что недостаточно для нахождения трех констант A , B , C .

Запишем дополнительные граничные условия на торце стержня при $\theta = 0^\circ$. На данной поверхности $\sin \theta = 0$, следовательно,

$$\begin{aligned} \sigma_r|_{\theta=0} &= 0, & \sigma_\theta|_{\theta=0} &= 0, \\ \tau_{r\theta}|_{\theta=0} &= - \left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{C}{r} \right). \end{aligned}$$

Направляющие косинусы (рис. 4.6)

$$l = \cos(\hat{v}, \hat{e}_r) = \cos 90^\circ = 0,$$

$$m = \cos(\hat{v}, \hat{e}_\theta) = \cos 180^\circ = -1.$$

На поверхности $\theta = 0^\circ$ нагрузки в направлении \hat{e}_θ отсутствуют, следовательно $q_\theta|_{\theta=0} = 0$, а закон распределения нагрузки в направлении \hat{e}_r неизвестен, следовательно, необходимо записать обобщенные (интегральные) граничные условия.

На поверхности $\theta = 0^\circ$ действуют напряжения σ_θ и $\tau_{r\theta}$, что приводит к возникновению внутренних сил (рис. 4.7)

$$N = \int_F \sigma_\theta dF; \quad Q = \int_F \tau_{r\theta} dF; \quad M = \int_F \sigma_\theta \left[r - \frac{a+b}{2} \right] dF.$$

Данные внутренние силы на торце стержня должны быть равны внешним силам и моментам. Так как продольная сила P и изгибающий момент m на торце стержня равны нулю, то с учетом $\sigma_\theta|_{\theta=0} = 0$, уравнения для N и M представляют собой нулевые тождества

$$N = \int_F \sigma_\theta|_{\theta=0^\circ} dF \equiv P_1 = 0, \quad M = \int_F \sigma_\theta|_{\theta=0^\circ} \left[r - \frac{a+b}{2} \right] dF = 0 \equiv m = 0.$$

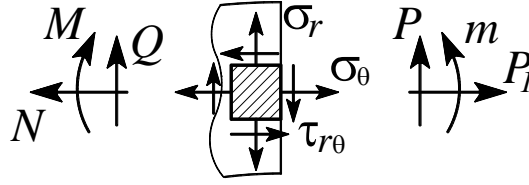


Рис. 4.7

Отличным от нуля является уравнение для перерезывающей силы Q

$$Q = \int_F \tau_{r\theta} \Big|_{\theta=0^\circ} dF = -P.$$

Знак «минус» в уравнении принят потому, что направления $\tau_{r\theta}$ и P противоположны. Так как $dF = bdr$, то при единичной толщине бруса $b = 1$ $dF = dr$ следовательно имеем

$$Q = \int_a^b \tau_{r\theta} \Big|_{\theta=0^\circ} dr = -P.$$

Интегрируя, получаем

$$\begin{aligned} -\int_a^b \left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{C}{r} \right) dr &= -\left[\frac{2Ar^2}{2} + 2B \frac{1}{2r^2} + C \ln r \right] \Big|_b^a = -\left[Ar^2 + \frac{B}{r^2} + C \ln r \right] \Big|_b^a = \\ &= -\left[A(b^2 - a^2) + B\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) + C(\ln b - \ln a) \right] = \left[A(b^2 - a^2) + B \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} + C \ln \frac{b}{a} \right] = -P, \end{aligned}$$

или, окончательно

$$A(b^2 - a^2) + B \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} + C \ln \frac{b}{a} = P \quad (5)$$

Решаем систему трех уравнений (1), (3), (5) с тремя неизвестными A , B , C .

$$\text{Из (1): } A = \frac{B}{a^4} - \frac{C}{2a^2}, \quad \text{из (3): } A = \frac{B}{b^4} - \frac{C}{2a^2},$$

следовательно

$$C = \frac{2B(b^2 + a^2)}{a^2 b^2}, \quad A = -\frac{B}{a^2 b^2}.$$

Подставляем полученные константы в уравнение (5). В результате имеем

$$\begin{aligned} B &= -\frac{Pa^2 b^2}{2 \left[(b^2 - a^2) - (b^2 + a^2) \ln \frac{b}{a} \right]}, \quad A = \frac{P}{2 \left[(b^2 - a^2) - (b^2 + a^2) \ln \frac{b}{a} \right]}, \\ C &= -\frac{P(b^2 + a^2)}{\left[(b^2 - a^2) - (b^2 + a^2) \ln \frac{b}{a} \right]}. \end{aligned}$$

4. Дифференциальные уравнения равновесия Коши для плоской задачи теории упругости в полярных координатах при отсутствии объемных сил принимают вид

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0.$$

Для проверки полученные выражения для напряжений подставляем в дифференциальные уравнения равновесия. Находим производные

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{C}{r} \right) \sin \theta \right] = \left(2A + \frac{6B}{r^4} - \frac{C}{r^2} \right) \sin \theta,$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{C}{r} \right) \cos \theta \right] = \frac{1}{r} \left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{C}{r} \right) \sin \theta =$$

$$= \left(2A - \frac{2B}{r^4} + \frac{C}{r^2} \right) \sin \theta,$$

$$\frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) = \frac{1}{r} \sin \theta \left[2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{C}{r} - 6Ar - \frac{2B}{r^3} - \frac{C}{r} \right] =$$

$$= \frac{1}{r} \left[-4Ar - \frac{4B}{r^3} \right] \sin \theta = -\left(4A + \frac{4B}{r^4} \right) \sin \theta,$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left[\left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{C}{r} \right) \cos \theta \right] = -\left(2A + \frac{6B}{r^4} - \frac{C}{r^2} \right) \cos \theta,$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\left(6Ar + \frac{2B}{r^3} + \frac{C}{r} \right) \sin \theta \right] = \left(6A + \frac{2B}{r^4} + \frac{C}{r^2} \right) \cos \theta,$$

$$\frac{2}{r} \tau_{r\theta} = -\left(4A - \frac{4B}{r^4} + \frac{2C}{r^2} \right) \cos \theta.$$

Подстановка производных показывает, что дифференциальные уравнения равновесия удовлетворяются тождественно.

$$\left[2A + \frac{6B}{r^4} - \frac{C}{r^2} + 2A - \frac{2B}{r^4} + \frac{C}{r^2} - 4A + \frac{4B}{r^4} \right] \sin \theta \equiv 0,$$

$$\left[-2A - \frac{6B}{r^4} + \frac{C}{r^2} + 6A + \frac{2B}{r^4} + \frac{C}{r^2} - 4A + \frac{4B}{r^4} - \frac{2C}{r^2} \right] \cos \theta \equiv 0.$$

5. Построение эпюр напряжений. С целью упрощения выражений для напряжений принимаем численные значения габаритов бруса, например, $a = 1$ м, $b = 2$ м, тогда

$$A = \frac{P}{2[(4-1) - (4+1)\ln 2]} = \frac{P}{2[3 - 5\ln 2]} = \frac{P}{2(-0,4657)} = -1,0737P,$$

$$B = -\frac{P \cdot 1,4}{2(-0,4657)} = 4,2946P, \quad C = -\frac{P(4+1)}{(-0,4657)} = 10,7365P,$$

тогда выражения для напряжений после подстановки постоянных принимают окончательный вид:

$$\sigma_r = \left(-1.1474r - \frac{8.5892}{r^3} + \frac{10.7365}{r} \right) P \sin \theta,$$

$$\sigma_\theta = \left(-6.4422r + \frac{8.5892}{r^3} + \frac{10.7365}{r} \right) P \sin \theta,$$

$$\tau_{r\theta} = - \left(-2.1474r + \frac{8.5892}{r^3} - \frac{10.7365}{r} \right) P \cos \theta.$$

Для построения эпюр напряжений рассмотрим сечение $\theta = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$, тогда с учетом $\sin 45^\circ = 0,7071$, $\cos 45^\circ = 0,7071$, получим

$$\sigma_r = \left(-1,5184r - \frac{6,0734}{r^3} + \frac{7,5918}{r} \right) P,$$

$$\sigma_\theta = \left(-4,5553r + \frac{6,0734}{r^3} + \frac{7,5918}{r} \right) P,$$

$$\tau_{r\theta} = \left(1,5184r + \frac{6,0734}{r^3} - \frac{7,5918}{r} \right) P.$$

На рис. 4.8 показаны эпюры напряжений, построенные при $\theta = 45^\circ$ по точкам $r = 1; 1,25; 1,5; 1,75; 2$ (м). Для более точного выявления очертания эпюр необходимо брать точки чаще.

При $r = 1,0$, $\sigma_r = 0$, $\sigma_\theta = 9,11P$, $\tau_{r\theta} = 0$;

$r = 1,25$, $\sigma_r = 1,07P$, $\sigma_\theta = 3,49P$, $\tau_{r\theta} = -1,07P$;

$r = 1,5$, $\sigma_r = 0,98P$, $\sigma_\theta = 0,03P$, $\tau_{r\theta} = -0,98P$;

$r = 1,75$, $\sigma_r = 0,55P$, $\sigma_\theta = -2,5P$, $\tau_{r\theta} = -0,55P$;

$r = 2,0$, $\sigma_r = 0$, $\sigma_\theta = -4,56P$, $\tau_{r\theta} = 0$.

Построенные эпюры соответствуют статическим граничным условиям на поверхностях $r = a, b$.

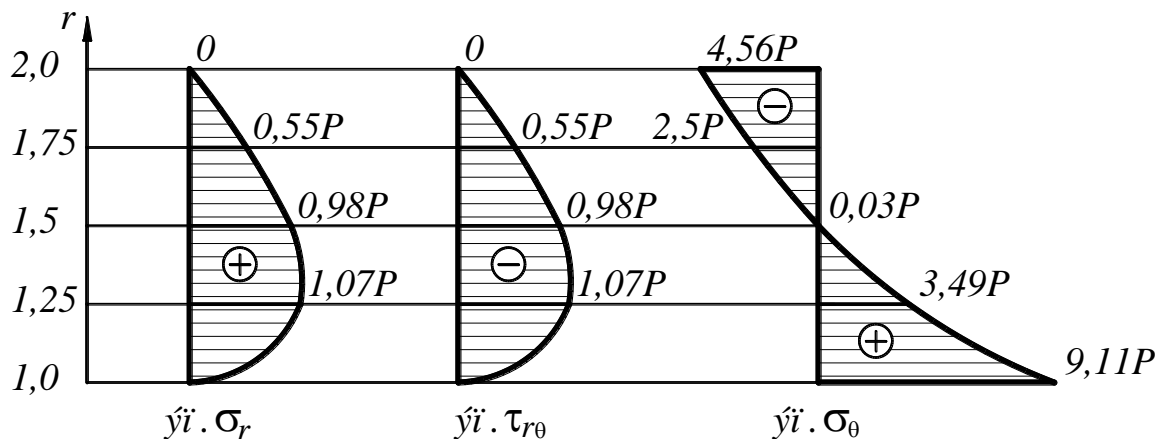


Рис. 4.8